

# Cinétique du Solide



$$[I_Q(S)]_R = \begin{bmatrix} \int_S (y^2 + z^2) dm & -\int_S xy dm & -\int_S xz dm \\ -\int_S xy dm & \int_S (x^2 + z^2) dm & -\int_S yz dm \\ -\int_S xz dm & -\int_S yz dm & \int_S (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}_{Q,R} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{Q,R}$$

$$\{Tc(S/R_g)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{Rc(S/R_g)} \\ \overrightarrow{\sigma(Q, S/R_g)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_S \overrightarrow{V(P \in S/R_g)} dm(P) \\ \int_S \overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{V(P \in S/R_g)} dm(P) \end{array} \right\}$$

# Notion de solide

## Définitions et hypothèses

- **Solide indéformable** :

$$\forall (Q, P) \text{ bipoint de } S^2, \quad \left( \frac{d\|\overrightarrow{QP}\|}{dt} \right)_{R_g} = 0$$

- **Solide homogène** : masse volumique  $\rightarrow$  ne varie pas

Masse du solide conservative  $\rightarrow$  la masse ne varie pas avec le temps.

$$\forall (Q, P) \in S^2, \quad \rho(P) = \rho(Q), \quad \left( \frac{d\rho(P)}{dt} \right)_{R_g} = 0$$

# Notion de solide

Centre de masse / centre de gravité

Expérimentalement

**Comment mesurer  
le centre de gravité  
d'un casque d'avion  
de chasse?**

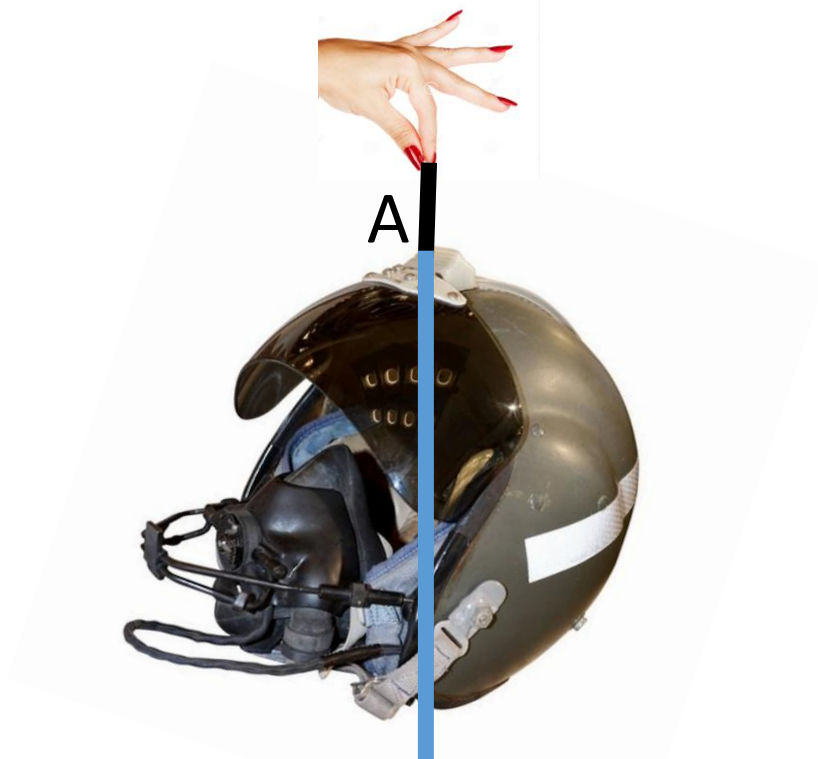


# Notion de solide

## Centre de masse / centre de gravité

### Expérimentalement

On suspend un casque d'avion de chasse à un fil, fixé successivement en A et B. On marque ainsi la continuité du fil par deux droites qui sont sécantes en un point.



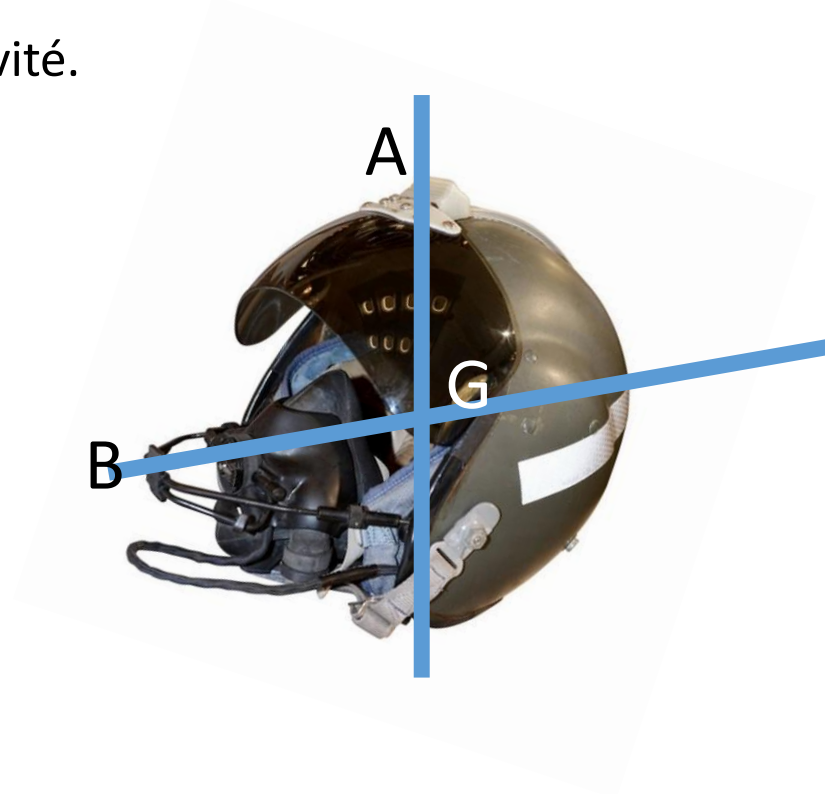
# Notion de solide

## Centre de masse / centre de gravité

### Expérimentalement

Casque → soumis à 2 forces : Tension du fil + Poids

Point de concours = Centre de gravité.



# Notion de solide

## Centre de masse / centre de gravité

### Analytiquement

- **Définition générale :**

Considérons un système de  $n$  points matériels  $P_i$  de masse  $m_i$ .

Le centre de masse  $G$  de cet ensemble est défini par le **barycentre** des points  $P_i$  affectés des coefficients  $m_i$ , c'est-à-dire :

$$M\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OP_i} \text{ ou } \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{GP_i} = \vec{0}.$$

( $O$  désigne un point quelconque et la masse  $M$  est égale à  $\sum_{i=1}^n m_i$ ).





# Notion de solide

Centre de masse / centre de gravité

Analytiquement

- Définition générale :

Solide  $\rightarrow$  somme intégrale (découpe du solide en éléments  $dm$  arbitraires centrés sur les points  $P + dm \rightarrow 0$ ):

$$\overrightarrow{MOG} = \int_S \overrightarrow{OP} dm \quad \text{ou} \quad \int_S \overrightarrow{GP} dm = \vec{0}$$



# Notion de solide

## Centre de masse / centre de gravité

### Analytiquement

- Coordonnées du centre de masse :

On note  $\overrightarrow{OG} = x_G \vec{x} + y_G \vec{y} + z_G \vec{z}$  et  $\overrightarrow{OP} = x \vec{x} + y \vec{y} + z \vec{z}$

d'où 
$$x_G = \frac{\int_{\Sigma} x \cdot dm}{M(\Sigma)} ; y_G = \frac{\int_{\Sigma} y \cdot dm}{M(\Sigma)} ; z_G = \frac{\int_{\Sigma} z \cdot dm}{M(\Sigma)}$$

Remarque : Si un solide admet un plan, un axe ou un centre de symétrie droite ou oblique, son centre de masse se trouve dans le plan, sur cet axe ou au centre de symétrie.





# Notion de solide

## Centre de masse / centre de gravité

### Détermination du centre de masse d'un ensemble de solides $S_i$

Ensemble de solides  $\Sigma$  de masse  $M$  est constitué de  $n$  solides  $S_i$  de masse  $m_i$  ( $M = \sum_{i=1}^n m_i$ ),  
Centre de gravité  $G$  :

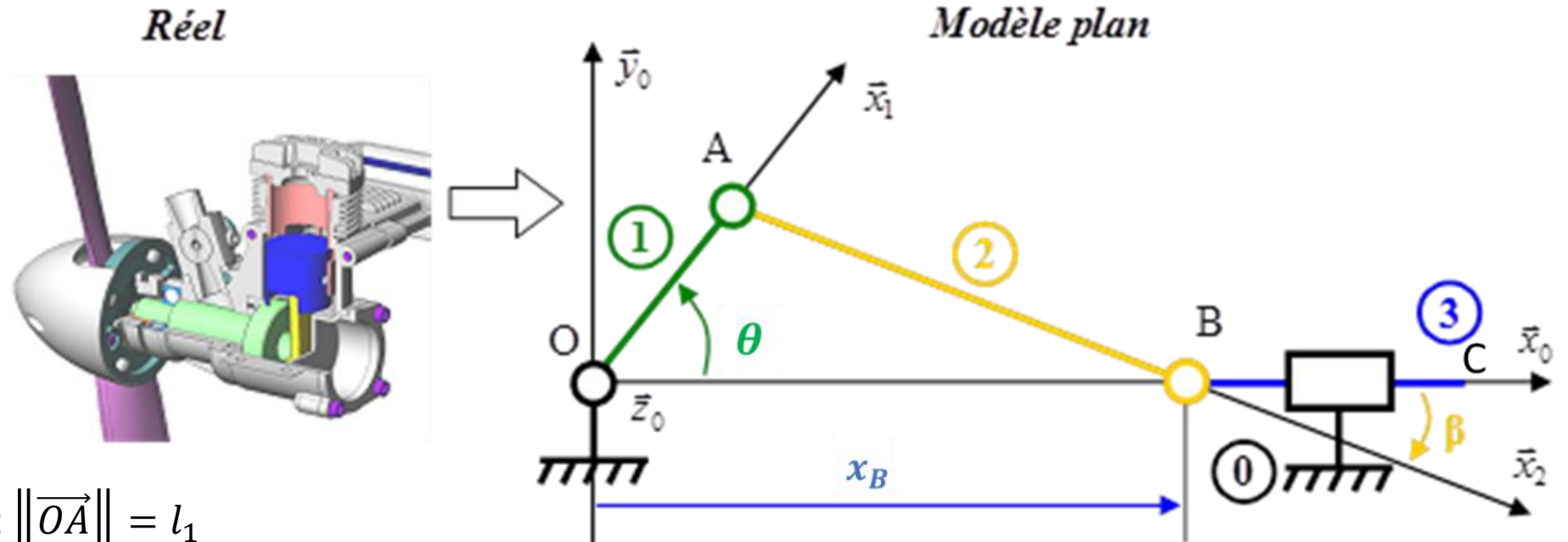
$$\left(\sum_{i=1}^n m_i\right)\overrightarrow{OG} = M\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OG}_i \text{ ou } \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{GG}_i = \vec{0}$$

# Notion de solide

## Centre de masse / centre de gravité

Détermination du centre de masse d'un ensemble de solides  $S_i$

Calculer le centre de gravité dans le plan  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$  du système bielle/manivelle/piston



Solide 1 (manivelle) :  $m_1$  et  $\|\vec{OA}\| = l_1$

Solide 2 (bielle) :  $m_2$  et  $\|\vec{AB}\| = l_2$

Solide 3 (piston) :  $m_3$  et  $\|\vec{BC}\| = l_3$

*Le centre de gravité de chaque solide est confondu avec le centre géométrique des pièces.*

# Notion de solide

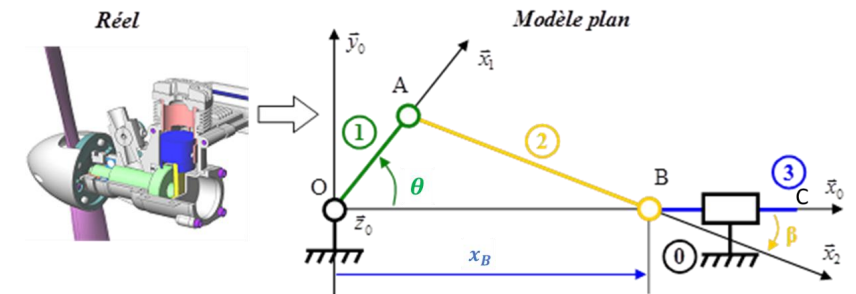
## Centre de masse / centre de gravité

### Détermination du centre de masse d'un ensemble de solides $S_i$

Solide 1 (manivelle) :  $m_1$  et  $\|\overrightarrow{OA}\| = l_1$

Solide 2 (bielle) :  $m_2$  et  $\|\overrightarrow{AB}\| = l_2$

Solide 3 (piston) :  $m_3$  et  $\|\overrightarrow{BC}\| = l_3$



On rappelle la loi E/S du mécanisme :  $x_B = l_1 \cos \theta + \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \theta}$

On donne aussi :  $\cos(\beta) = \frac{x_B - l_1 \cos(\theta)}{l_2}$  et  $\sin(\beta) = -\frac{l_1 \sin(\theta)}{l_2}$

# Notion de solide

## Centre de masse / centre de gravité

Détermination du centre de masse d'un ensemble de solides  $S_i$

Solide 1 (manivelle) :  $m_1$  et  $\|\overline{OA}\| = l_1$

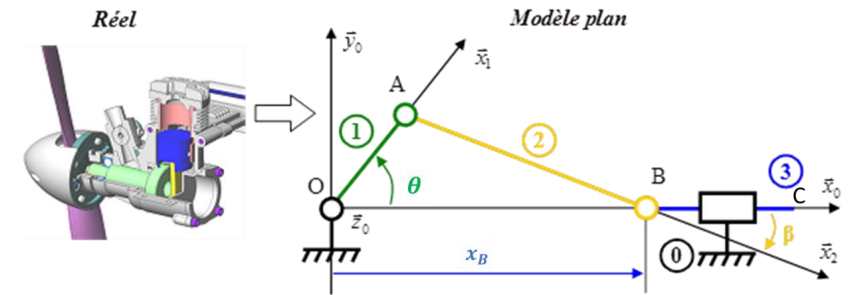
Solide 2 (bielle) :  $m_2$  et  $\|\overline{AB}\| = l_2$

Solide 3 (piston) :  $m_3$  et  $\|\overline{BC}\| = l_3$

$$\begin{cases} x_{G1} = \frac{l_1}{2} \cos(\theta) \\ y_{G1} = \frac{l_1}{2} \sin(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{G2} = \frac{l_1}{2} \cos(\theta) + \frac{x_B}{2} \\ y_{G2} = \frac{l_1}{2} \sin(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{G3} = x_B + \frac{l_3}{2} \\ y_{G3} = 0 \end{cases}$$



$$x_B = l_1 \cos \theta + \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \theta}$$

$$\cos(\beta) = \frac{x_B - l_1 \cos(\theta)}{L_2} \text{ et } \sin(\beta) = -\frac{L_1 \sin(\theta)}{L_2}$$

# Notion de solide

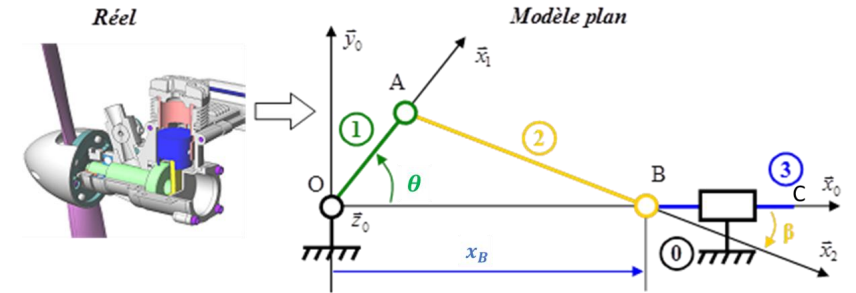
## Centre de masse / centre de gravité

### Détermination du centre de masse d'un ensemble de solides $S_i$

Solide 1 (manivelle) :  $m_1$  et  $\|\overrightarrow{OA}\| = l_1$

Solide 2 (bielle) :  $m_2$  et  $\|\overrightarrow{AB}\| = l_2$

Solide 3 (piston) :  $m_3$  et  $\|\overrightarrow{BC}\| = l_3$



$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} \left( (m_1 + m_2) \frac{l_1}{2} \cos(\theta) + \left( m_3 + \frac{m_2}{2} \right) x_B + m_3 \frac{l_3}{2} \right) \\ y_G = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \left( \frac{l_1}{2} \sin(\theta) \right) \end{cases}$$

$$x_B = l_1 \cos \theta + \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \theta}$$

$$\cos(\beta) = \frac{x_B - l_1 \cos(\theta)}{l_2} \quad \text{et} \quad \sin(\beta) = -\frac{l_1 \sin(\theta)}{l_2}$$

# Notion de solide

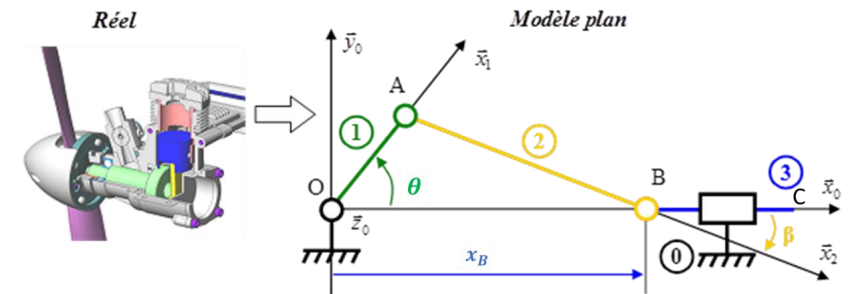
## Centre de masse / centre de gravité

### Détermination du centre de masse d'un ensemble de solides $S_i$

Solide 1 (manivelle) :  $m_1$  et  $\|\overline{OA}\| = l_1$

Solide 2 (bielle) :  $m_2$  et  $\|\overline{AB}\| = l_2$

Solide 3 (piston) :  $m_3$  et  $\|\overline{BC}\| = l_3$



$$x_B = l_1 \cos \theta + \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \theta}$$

$$\cos(\beta) = \frac{x_B - l_1 \cos(\theta)}{l_2} \quad \text{et} \quad \sin(\beta) = -\frac{l_1 \sin(\theta)}{l_2}$$

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} \left( (m_1 + m_2) \frac{l_1}{2} \cos(\theta) + \left( m_3 + \frac{m_2}{2} \right) \left( l_1 \cos \theta + \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \theta} \right) + m_3 \frac{l_3}{2} \right) \\ y_G = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \left( \frac{l_1}{2} \sin(\theta) \right) \end{cases}$$



# Notion de solide

## Etude d'une ligne matérielle plane

### Centre de masse

Masse linéique  $\mu = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta l}$  avec solides homogènes :  $\mu = \text{cste.}$

Centre de masse :  $L\overrightarrow{OG} = \int_L \overrightarrow{OP} dl$  ou  $\int_L \overrightarrow{GP} dl = \vec{0}.$

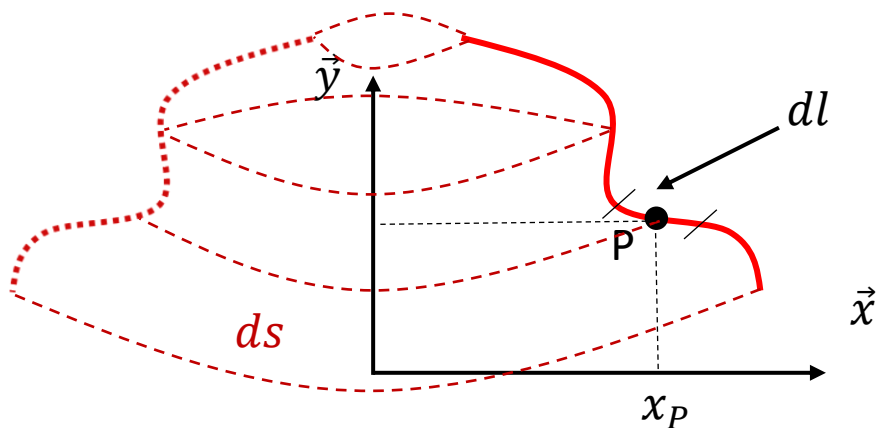
# Notion de solide

## Etude d'une ligne matérielle plane

### Théorème de Guldin (Th n°1)

Le théorème de Guldin (n°1) → Centre de masse (ou centre d'inertie) d'une ligne plane.

Soit une courbe plane (C) de longueur L appartenant au plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  et **ne coupant pas l'axe**  $(O, \vec{y})$ .



Soit G le centre de masse de la courbe C.

$$\text{Par définition : } M(\Sigma)\overrightarrow{OG} = \int_C \overrightarrow{OP} dm \quad \text{ou encore,} \quad L\overrightarrow{OG} = \int_C \overrightarrow{OP} dl$$

$$\text{On projette l'équation sur l'axe } (O, \vec{x}) : Lx_G = \int_C x_p dl$$

# Notion de solide

## Etude d'une ligne matérielle plane

### Théorème de Guldin (Th n°1)

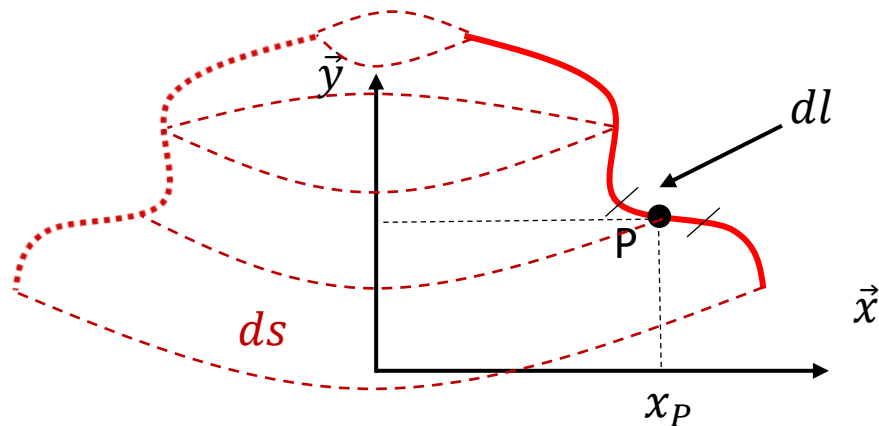
On fait tourner la ligne autour de l'axe  $(O, \vec{y})$  et on regarde la surface engendrée :

$$2\pi \cdot L \cdot x_G = \int_C 2\pi \cdot x_p \cdot dl$$

L'élément  $dl$  de  $(C)$  centré sur le point P engendre la surface

$$ds = 2\pi \cdot x_p$$

$$\text{Et } S = \int_C ds$$



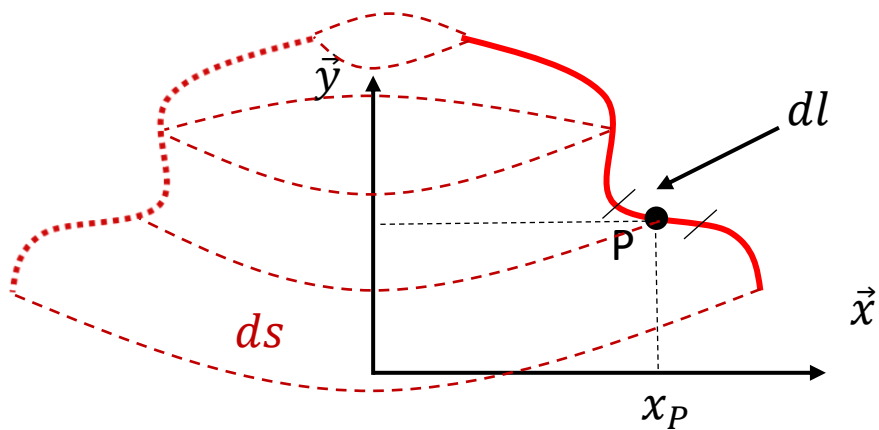
$$2\pi \cdot L \cdot x_G = \int_C 2\pi \cdot x_p \cdot dl = S$$

# Notion de solide

## Etude d'une ligne matérielle plane

### Théorème de Pappus (Th n°1)

Th de Pappus : L'aire de la surface engendrée par une ligne  $C$ , de longueur  $L$ , tournant autour d'un axe  $\Delta$  situé dans son plan et qui ne le coupe pas, est égal au produit de la longueur  $L$  par la circonférence décrite par le centre de masse  $G$  de la courbe  $C$ .

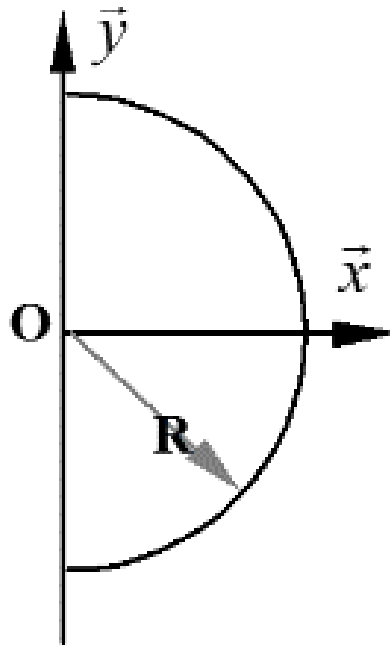


# Notion de solide

## Etude d'une ligne matérielle plane

### Théorème de Guldin (Th n°1)

Exemple: Centre de masse d'une ligne matérielle homogène demi-circulaire (centre O, rayon R).



Nous avons  $x_G = \frac{S}{2\pi L} = \frac{4\pi R^2}{2\pi \cdot \pi R}$  soit  $x_G = \frac{2R}{\pi}$ .

# Notion de solide

## Etude d'une ligne matérielle plane

### Théorème de Pappus (Th n°1)

#### **Exemple : Détermination de la surface totale d'un cône :**

Montrer que  $S_{lat} = \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2}$  et donc que  $S_{c\hat{o}ne} = \pi \cdot R \cdot (\sqrt{R^2 + H^2} + R)$



# Notion de solide

## Etude d'une surface matérielle plane

### Centre de masse

Masse surfacique  $\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta S}$  pour une plaque homogène  $\sigma = \text{cste}$ .

Centre de masse :

$$S \cdot \overrightarrow{OG} = \int_S \overrightarrow{OP} ds \quad \text{ou encore} \quad \int_S \overrightarrow{GP} ds = \vec{0}.$$

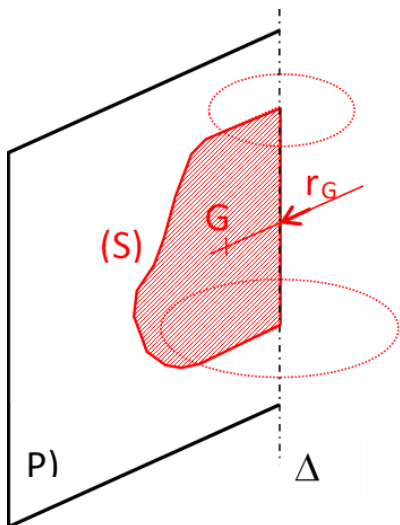
# Notion de solide

## Etude d'une surface matérielle plane

### Théorème de Guldin (Th n°2)

Le théorème de Guldin (n°2) permet de déterminer le centre de masse (ou centre d'inertie) d'une surface plane.

Soit une surface plane (S) de surface S appartenant au plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  et **ne coupant pas l'axe**  $(O, \vec{y})$ .



Soit G le centre de masse de la surface S, par définition :

$$M(\Sigma)\overline{OG} = \int_S \overline{OP} dm \quad \text{ou encore,} \quad S \cdot \overline{OG} = \int_S \overline{OP} ds$$

On projette l'équation sur l'axe  $(O, \vec{x})$  :  $S \cdot x_G = \int_S x_p ds$

Idem théorème n°1 :

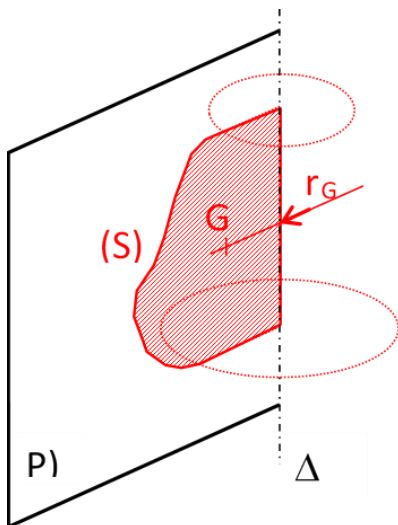
$$2\pi \cdot S \cdot x_G = \int_S 2\pi \cdot x_p \cdot ds = V$$

# Notion de solide

## Etude d'une surface matérielle plane

### Théorème de Guldin (Th n°2)

Th de Guldin : Le volume engendré par la surface  $S$ , de surface  $S$ , tournant autour d'un axe  $\Delta$  situé dans son plan et qui ne le coupe pas, est égal au produit de la surface  $S$  par la circonférence décrite par le centre de masse  $G$  de la surface  $S$ .

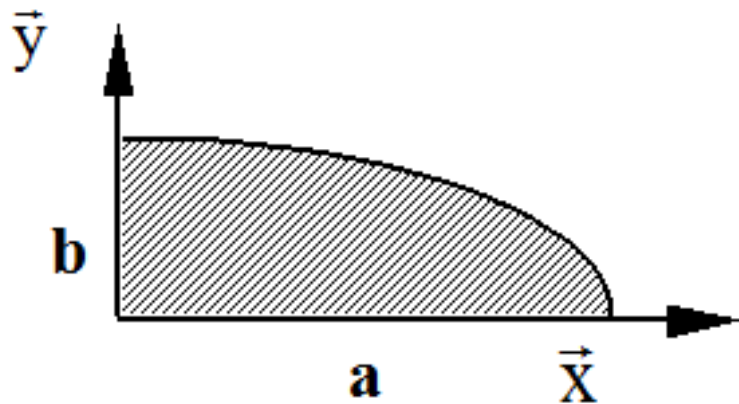


# Notion de solide

## Etude d'une surface matérielle plane

*Théorème de Guldin (Th n°2)*

**Exemple : Etude de la surface engendrée par un quart d'ellipse :**



Quart de plaque elliptique d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\mu dS = dm$$

**Position du centre de gravité ??**

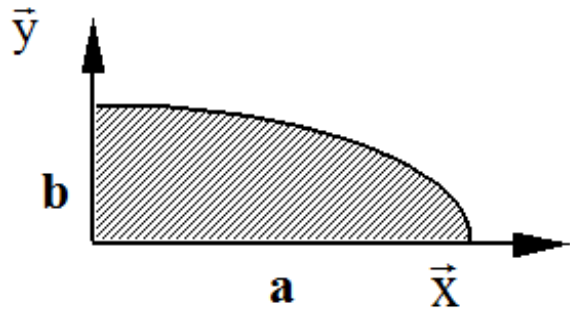
y et x ont des rôles symétriques, nous calculerons uniquement la position de  $y_G$

# Notion de solide

## Etude d'une surface matérielle plane

### Théorème de Guldin (Th n°2)

#### **Exemple : Etude de la surface engendrée par un quart d'ellipse :**



- Calcul de la position du centre de masse  $G$  sur l'axe  $y$  :

$$S \cdot y_G = \int_S y ds \text{ d'où } S \cdot y_G = \int_0^b a \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)} dy, S \cdot y_G = \left[ -\frac{ab^2}{3} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^b$$

d'où le résultat  $S \cdot y_G = \frac{b^2 a}{3}$ , avec  $S = \frac{\pi ab}{4}$  (aire d'un quart d'ellipse).

$$y_G = \frac{4b}{3\pi}$$

# Notion de solide

## Etude d'une surface matérielle plane

### Théorème de Guldin (Th n°2)

#### Exemple : Détermination du volume d'un cône :

Montrer que  $V_{\text{cône}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$

On peut également le démontrer par intégration :

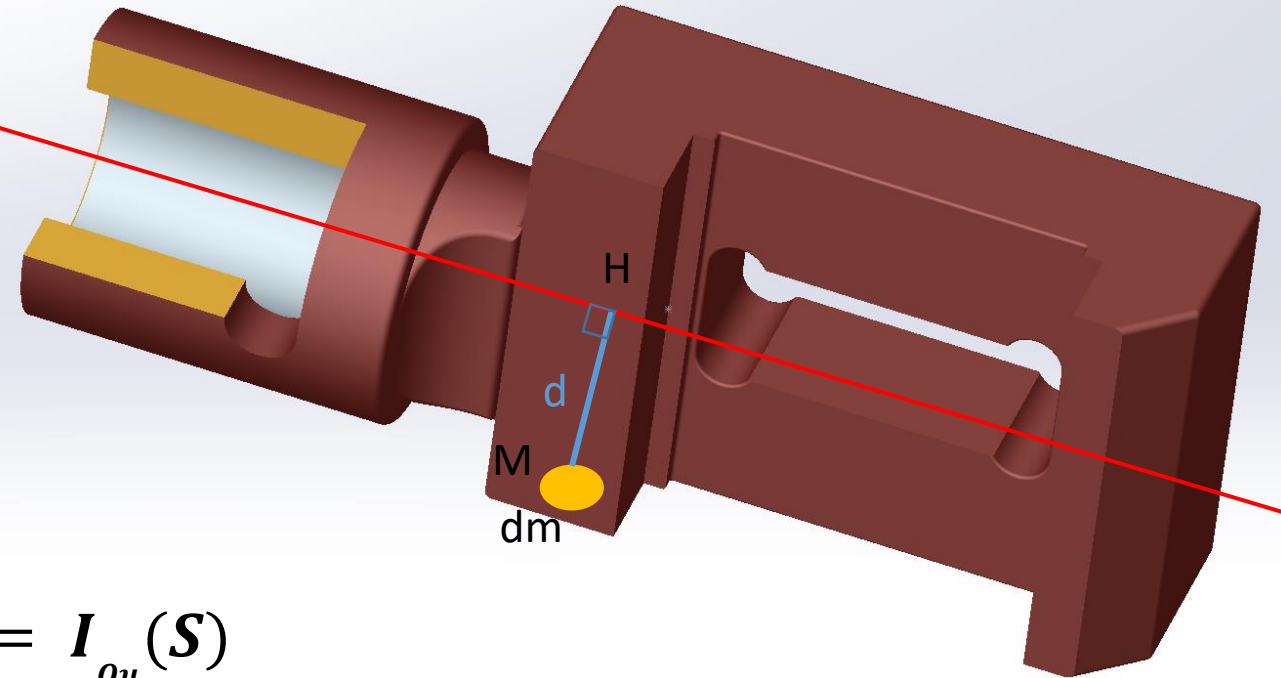
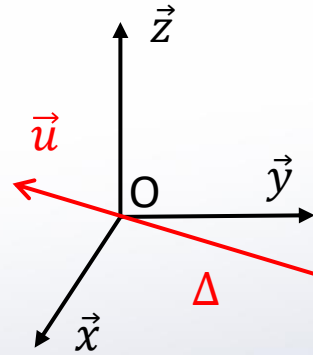
$$V_{\text{cône}} = \int_V r \cdot d\theta \cdot dr \cdot dz = \int_0^H \int_0^{r_{\text{sup}}} \int_0^{2\pi} r \cdot d\theta \cdot dr \cdot dz = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H \quad \text{avec } r_{\text{sup}} = \frac{R}{H} \cdot z$$

(car la borne d'intégration du rayon dépend de l'altitude du disque).



# Moment d'inertie autour d'un axe

## Moment d'inertie d'un solide



- Par rapport à un axe  $\Delta$  :

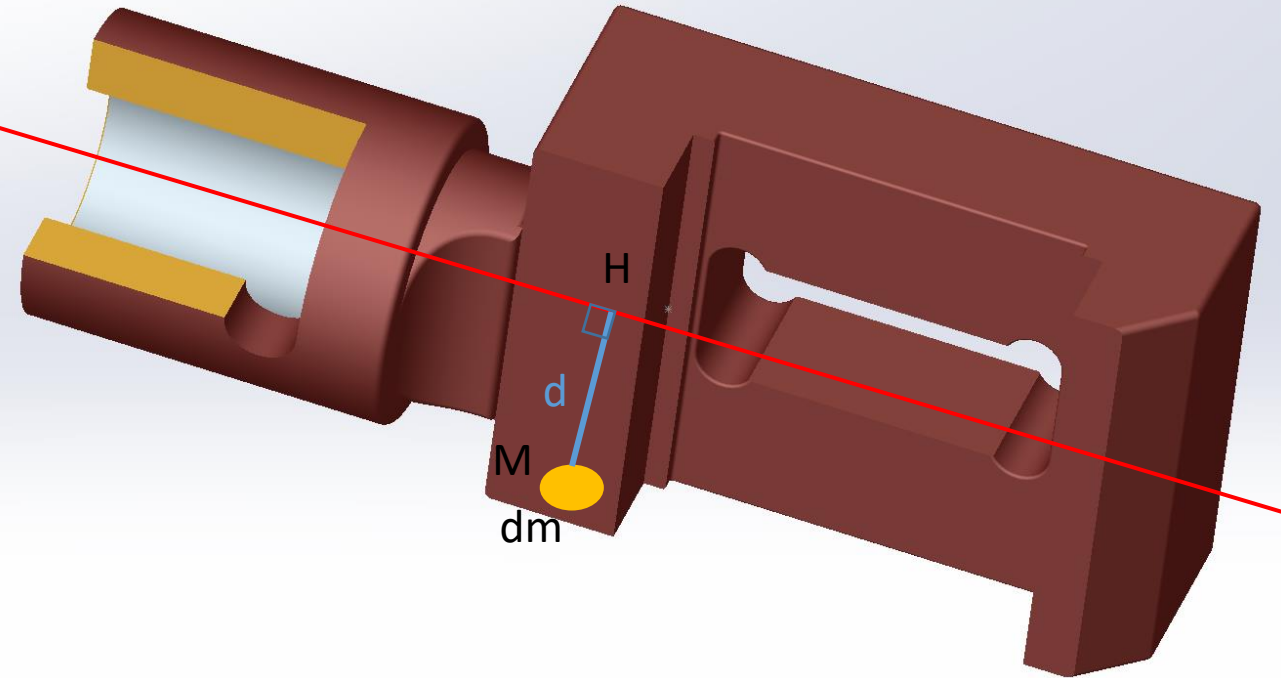
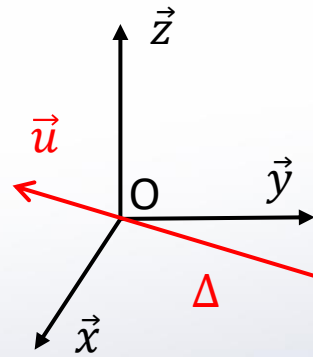
$H$  = projection orthogonale de  $M \in S$  sur  $\Delta = (O, \vec{u})$

$$I(S, \Delta) = \int_S \overline{MH}^2 dm = \int_S d^2 dm = I_{ou}(S)$$

$d$  = distance de  $M$  à l'axe  $\Delta$

# Moment d'inertie autour d'un axe

## Moment d'inertie d'un solide

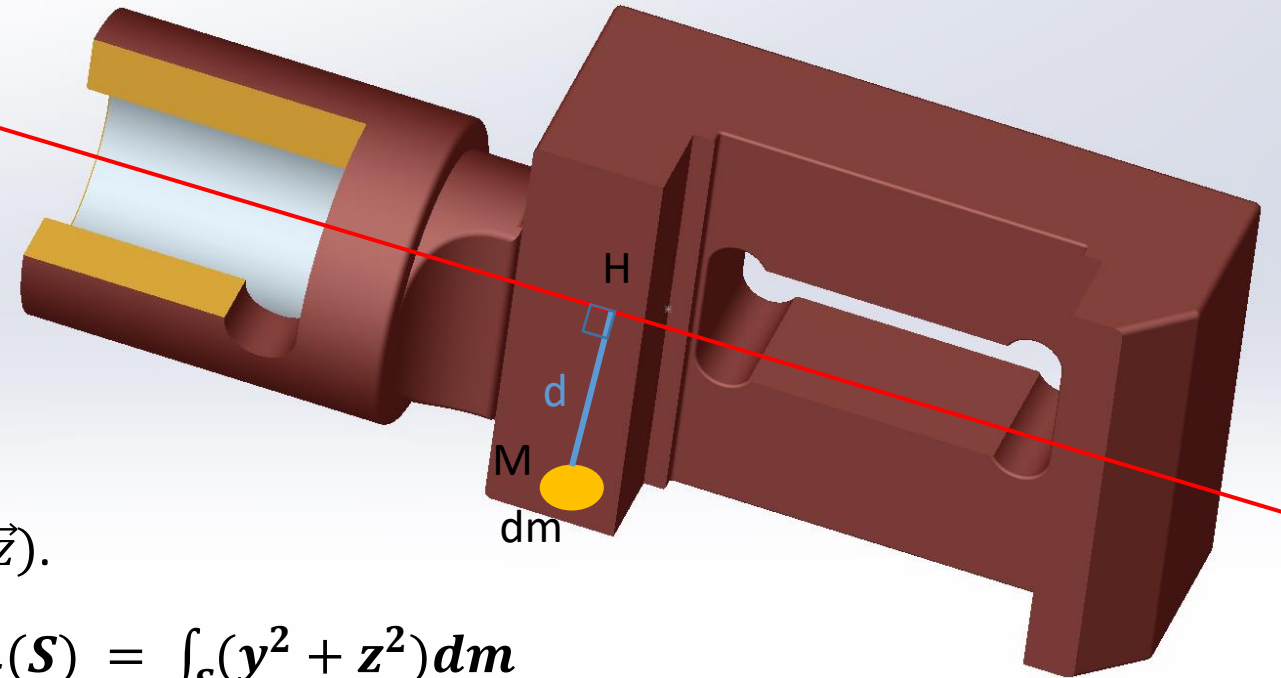
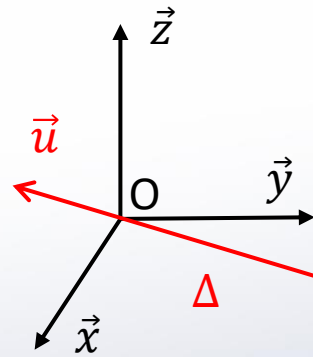


- Par rapport à un point A :

$$I_A(S) = \int_S \overline{AM}^2 dm$$

# Moment d'inertie autour d'un axe

## Moment d'inertie d'un solide



Soit M de coordonnées  $x, y, z$  dans le repère  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

$$I_O(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

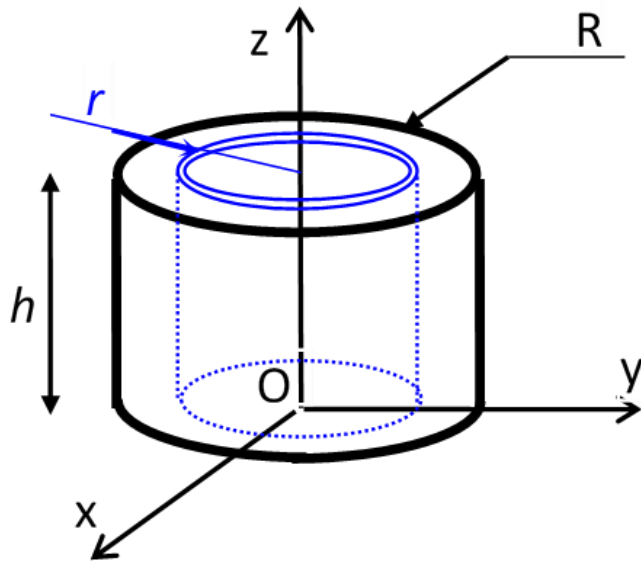
$$I_{Ox}(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} (y^2 + z^2) dm$$

Remarque : Unité : **kg.m<sup>2</sup>**

# Moment d'inertie autour d'un axe

## Moment d'inertie d'un solide

Exemple 1 : Déterminer  $I_{Oz}$  pour le cylindre de révolution de rayon  $R$ , de hauteur  $h$  et de masse  $m$ .



$$I_{Oz}(S) = \int_S (x^2 + y^2) dm \Rightarrow \text{coordonnées polaires}$$

$$= \int_S r^2 dm \quad \text{avec } dm = \rho dv = \rho 2\pi r h dr$$

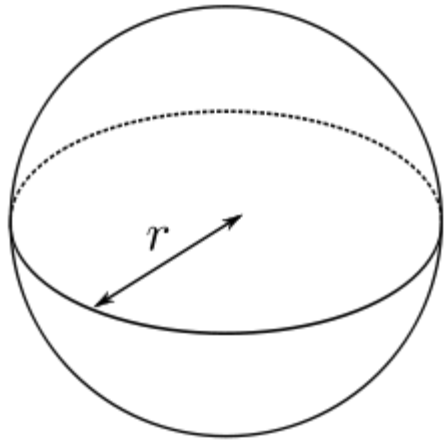
(en regroupant tous les points  $M$  à même distance  $r$  de  $Oz$ )

$$= \int_S \rho 2\pi r^3 h dr = 2\pi \rho h \frac{R^4}{4} \Rightarrow \mathbf{I_{Oz} = m \frac{R^2}{2}}$$

# Moment d'inertie autour d'un axe

## Moment d'inertie d'un solide

Exemple 2 : Déterminer le moment d'inertie d'une sphère de rayon  $R$ , de masse  $m$  par rapport à son centre  $O$  puis par rapport à un diamètre  $\Delta$  quelconque.



$$I_O = \int_S r^2 dm \quad \text{avec } dm = \rho dv = \rho d\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \rho 4\pi r^2 dr$$

$$I_O = \int_S \rho 4\pi r^4 dr = \rho 4\pi \frac{R^5}{5} = \frac{3}{5} m R^2$$

Or  $I_\Delta = I_{ox} = I_{oy} = I_{oz}$  par symétrie et  $I_{ox} + I_{oy} + I_{oz} = 2 I_O = 3 I_\Delta$

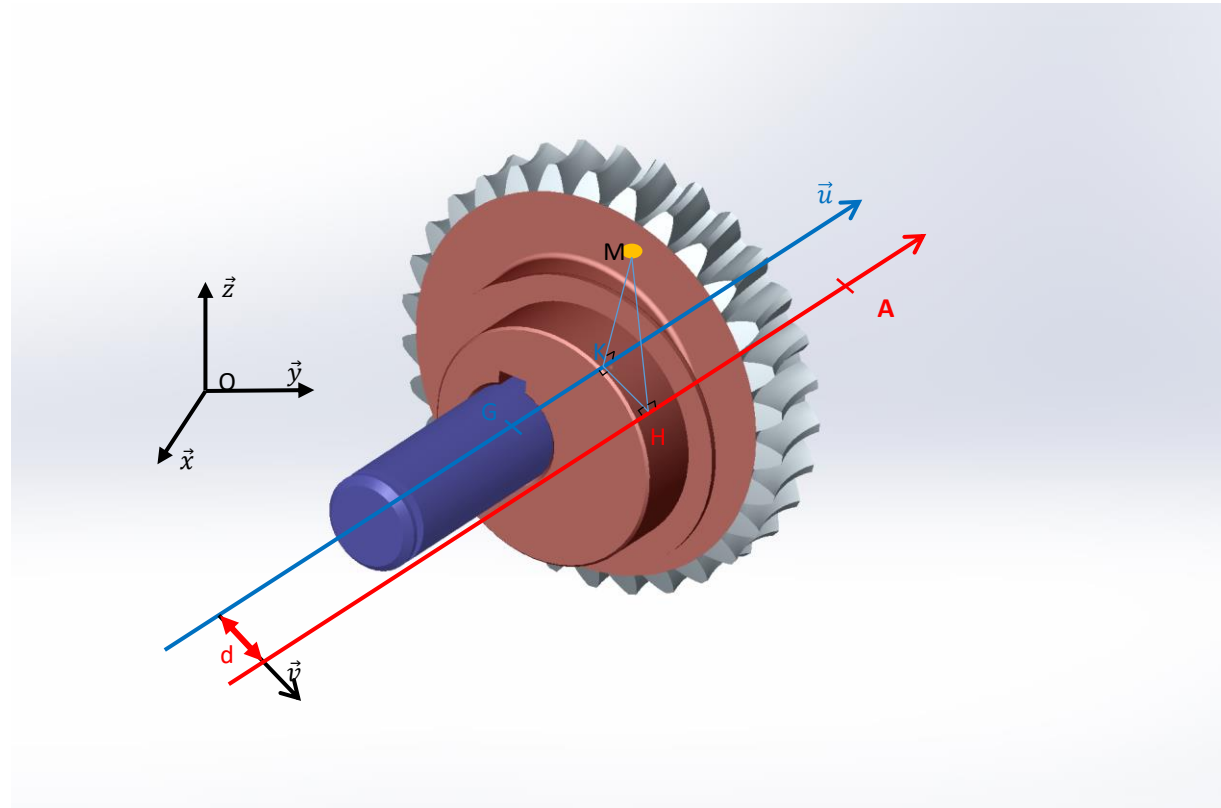
$$\text{d'où } I_\Delta = \frac{2}{5} m R^2$$

# Moment d'inertie autour d'un axe

## Théorème de Huygens

Soit un axe  $\vec{u}$  passant par le centre de gravité G d'un solide S et un axe parallèle à la distance  $d$  passant par le point A.

On cherche la relation entre  $I_{Gu}(S)$  et  $I_{Au}(S)$ .



$$I_{Au}(S) = \int_S \overline{HM}^2 dm = \int_S (\overline{HK} + \overline{KM})^2 dm \quad (\text{par définition})$$

$$I_{Au}(S) = \int_S \overline{HK}^2 dm + \int_S \overline{KM}^2 dm + 2 \cdot \int_S \overline{HK} \cdot \overline{KM} dm$$

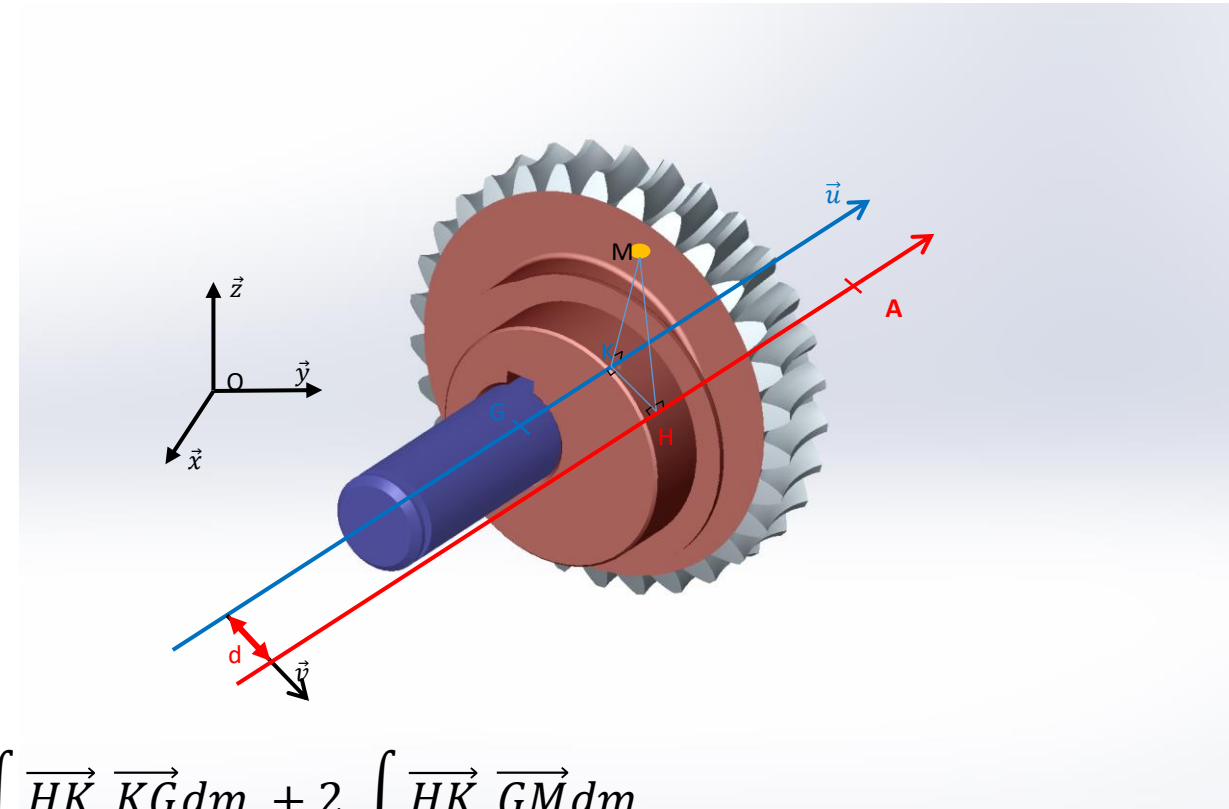
$$I_{Au}(S) = md^2 + I_{Gu}(S) + 2 \cdot \int_S \overline{HK} \cdot \overline{KM} dm \quad (\text{définitions précédentes + figure + } \overline{KM} = \overline{KG} + \overline{GM})$$

$$I_{Au}(S) = md^2 + I_{Gu}(S) + 2 \cdot \int_S \overline{HK} \cdot \overline{KG} dm + 2 \cdot \int_S \overline{HK} \cdot \overline{GM} dm$$



# Moment d'inertie autour d'un axe

## Théorème de Huygens



$$I_{Au}(S) = md^2 + I_{Gu}(S) + 2. \int_S \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{KG} dm + 2. \int_S \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{GM} dm$$

Or  $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{KG}$  sont orthogonaux et  $2. \int_S \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{GM} dm = 2. d. \vec{v} \int_S \overrightarrow{GM} dm = \vec{0}$  (par définition du centre de gravité).

D'où :

$$I_{Au}(S) = I_{Gu}(S) + md^2$$

# Moment d'inertie autour d'un axe

Matrice d'inertie (ou tenseur d'inertie) d'un solide en Q

Repère R associé au solide :

$$\overrightarrow{QP} = x.\vec{x} + y.\vec{y} + z.\vec{z}$$

$$\vec{u} = p.\vec{x} + q.\vec{y} + r.\vec{z}$$

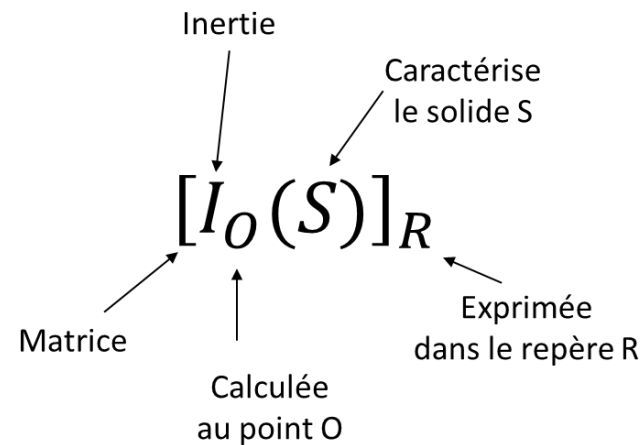
Cette matrice est ici définie dans un repère R associé au solide.

$$[I_Q(S)]_R = \begin{bmatrix} \int_S (y^2 + z^2) dm & - \int_S xy dm & - \int_S xz dm \\ - \int_S xy dm & \int_S (x^2 + z^2) dm & - \int_S yz dm \\ - \int_S xz dm & - \int_S yz dm & \int_S (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}_{Q,R} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{Q,R}$$

# Moment d'inertie autour d'un axe

Matrice d'inertie (ou tenseur d'inertie) d'un solide en Q

$$[I_Q(S)]_R = \begin{bmatrix} \int_S (y^2 + z^2) dm & -\int_S xy dm & -\int_S xz dm \\ -\int_S xy dm & \int_S (x^2 + z^2) dm & -\int_S yz dm \\ -\int_S xz dm & -\int_S yz dm & \int_S (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}_{Q,R} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{Q,R}$$



# Moment d'inertie autour d'un axe

## Matrice d'inertie (ou tenseur d'inertie) d'un solide en Q

$$[I_Q(S)]_R = \begin{bmatrix} \int_S (y^2 + z^2) dm & -\int_S xy dm & -\int_S xz dm \\ -\int_S xy dm & \int_S (x^2 + z^2) dm & -\int_S yz dm \\ -\int_S xz dm & -\int_S yz dm & \int_S (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}_{Q,R} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{Q,R}$$

Dans la plupart des cas, on pourra omettre la notation avec le repère R pour alléger les notations.

Remarque : Si on demande de calculer E, il n'y a pas de signe « moins ».

Moment d'inertie du solide S par rapport à un axe  $\vec{u}$  passant par Q :

$$I_{Qu}(S) = \vec{u} \cdot [I_Q(S)] \vec{u} \qquad I_{Quv}(S) = \vec{u} \cdot [I_Q(S)] \vec{v}$$

Attention : La matrice d'inertie d'un solide est calculée en **un point** et **dans un repère lié au solide**.

# Moment d'inertie autour d'un axe

## Particularités de l'opérateur

### Conventions

$R = (Q, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  :

- A, B et C  $\rightarrow$  Moments d'inertie par rapport aux axes  $(Q, \vec{x})$ ,  $(Q, \vec{y})$  et  $(Q, \vec{z})$ .
- D, E et F  $\rightarrow$  Produits d'inerties par rapport aux plans  $(Q, \vec{y}, \vec{z})$ ,  $(Q, \vec{x}, \vec{z})$ ,  $(Q, \vec{x}, \vec{y})$ .

# Moment d'inertie autour d'un axe

## Particularités de l'opérateur

### Extensions

Moment d'inertie en le définissant par rapport à un élément géométrique quelconque :

$$I(S/(Q, \vec{y}, \vec{z})) = \int_S x^2 dm \quad \text{et} \quad I(S/(Q, \vec{x}, \vec{z})) = \int_S y^2 dm$$

Somme des moments d'inertie par rapport à deux plans orthogonaux

$$I(S/(Q, \vec{x}, \vec{z})) + I(S/(Q, \vec{y}, \vec{z})) = I(S/(Q, \vec{z})) = C$$

Somme des moments d'inertie par rapport à trois plans orthogonaux

$$I(S/(Q, \vec{x}, \vec{z})) + I(S/(Q, \vec{y}, \vec{z})) + I(S/(Q, \vec{x}, \vec{y})) = I(S/Q) = \frac{1}{2} (A + B + C)$$

# Moment d'inertie autour d'un axe

## Particularités de l'opérateur

### Repères particuliers

Matrice d'inertie d'un solide  $\rightarrow$  symétrique + vecteurs propres orthogonaux  $\rightarrow$  **Repère Principal d'Inertie.**

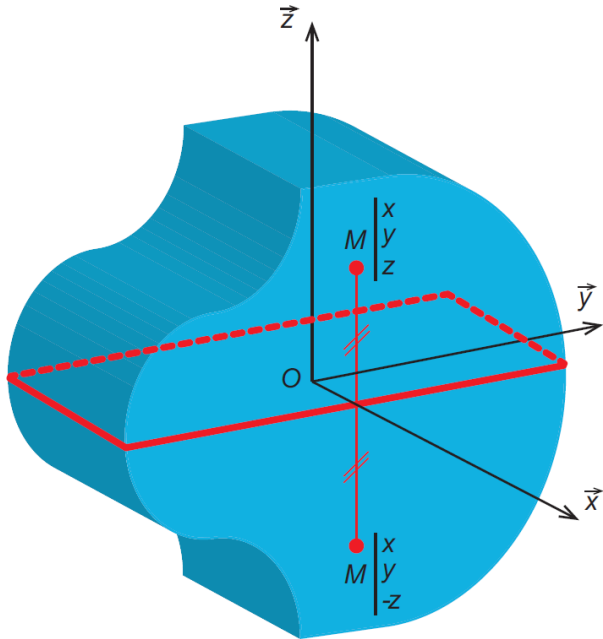
**Lorsqu'un solide possède un élément de symétrie (plan, droite, point), cet élément fait partie du repère principal d'inertie.**

**De plus, le CdG (G) appartient à cet élément de symétrie.**

# Moment d'inertie autour d'un axe

Propriétés de la matrice d'inertie – Cas particuliers de solides

*Un Plan de symétrie  $(Q, \vec{x}, \vec{y})$  :*



L'axe perpendiculaire à ce plan (*donc  $\vec{z}$* ) est principal d'inertie.



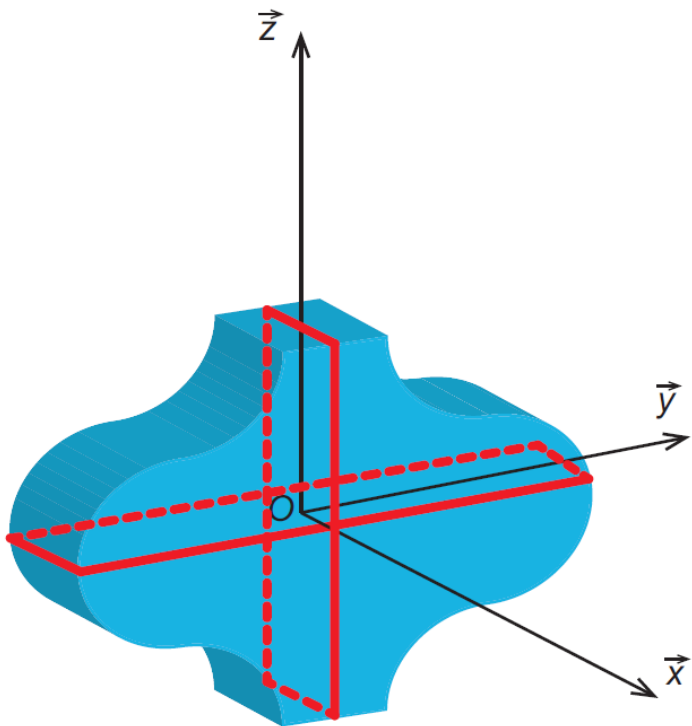
$$D=0 \text{ et } E=0 \rightarrow \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{Qxyz}$$



# Moment d'inertie autour d'un axe

Propriétés de la matrice d'inertie – Cas particuliers de solides

*Deux Plans de symétrie  $(Q, \vec{x}, \vec{y})$  et  $(Q, \vec{x}, \vec{z})$  :*

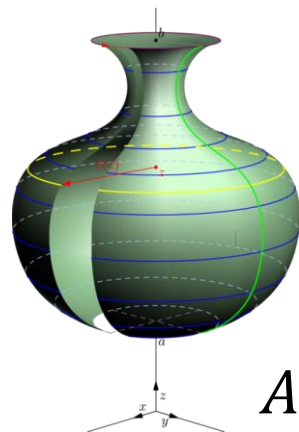
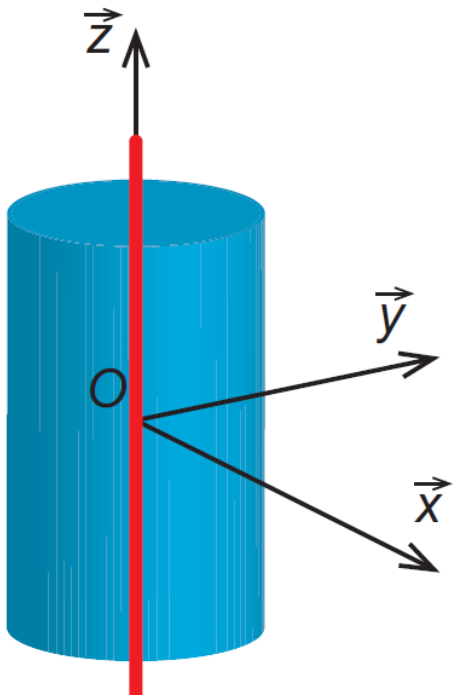


$$D=0 \text{ et } E=0 \text{ et } F=0 \rightarrow \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{Qxyz}$$

# Moment d'inertie autour d'un axe

Propriétés de la matrice d'inertie – Cas particuliers de solides

*Un axe de Révolution  $(Q, \vec{z})$  :*



$$A = B \text{ et } D=0 \text{ et } E=0 \text{ et } F=0 \rightarrow \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{Qz}$$

$$A + B = 2A = 2B = C + 2 \cdot \int_S z^2 dm = \int_S r^2 dm + 2 \cdot \int_S z^2 dm$$

# Moment d'inertie autour d'un axe

Propriétés de la matrice d'inertie – Cas particuliers de solides

*Un centre de symétrie sphérique (G forcément) :*



$$A=B=C \text{ et } D=0 \text{ et } E=0 \text{ et } F=0 \rightarrow \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_Q$$

$$A + B + C = 3A = 3B = 3C = 2 \cdot \int_S r^2 dm$$

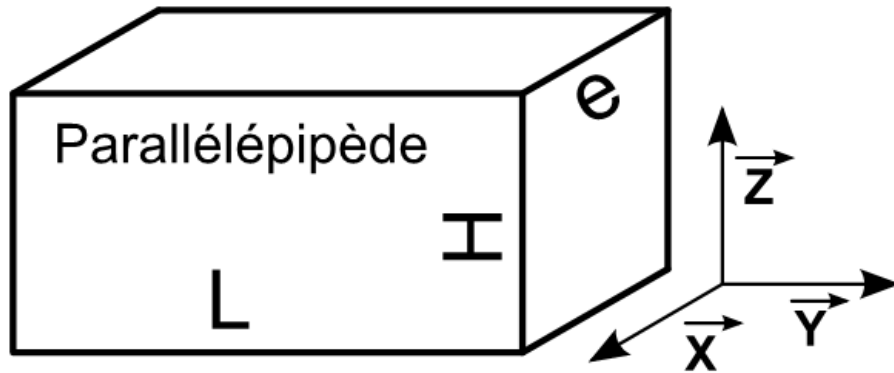
Remarques :

- Le repère dans lequel est exprimé la matrice d'inertie est très important.
- La matrice a la même forme (mais pas forcément les mêmes valeurs) quel que soit le point de l'axe où elle est calculée et **le moment d'inertie autour de l'axe est constant quel que soit le point de calcul tant que l'on reste sur l'axe.**

# Moment d'inertie autour d'un axe

## Les solides élémentaires

### Parallélépipède en G



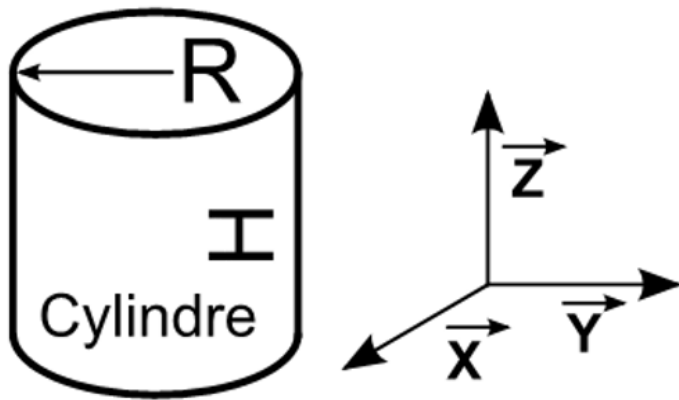
3 plans de symétrie ( $D = E = F = 0$ ).

$$\begin{bmatrix} M \frac{H^2 + L^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & M \frac{H^2 + e^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & M \frac{L^2 + e^2}{12} \end{bmatrix}_{G,R}$$

# Moment d'inertie autour d'un axe

## Les solides élémentaires

### Cylindre en G



Axe de révolution  $G_z$  :  $A = B$  et  $D = E = F = 0$ .

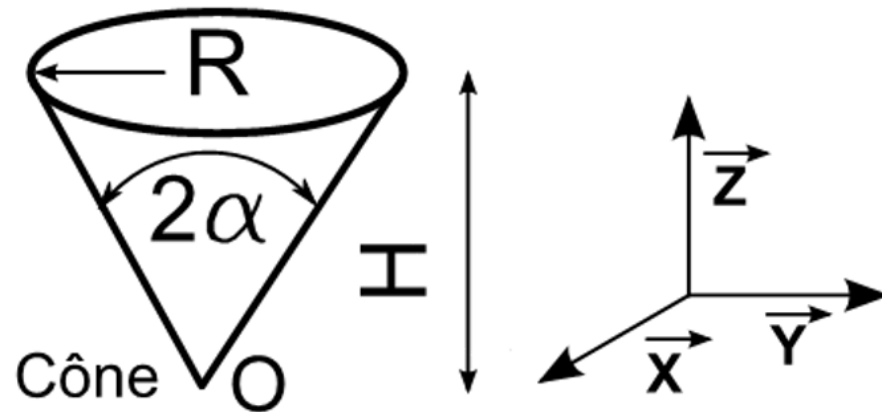
$$\begin{bmatrix} M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & M\frac{R^2}{2} \end{bmatrix}_{G,z}$$

**Pour tous les solides de révolution** :  $A = B$  et  $A + B = 2 A = 2 B = C + 2 \int_S z^2 dm$

# Moment d'inertie autour d'un axe

## Les solides élémentaires

### Cône en O (sommet)



Hauteur  $H$  sur  $\vec{z}$  et base circulaire de rayon  $R$ .

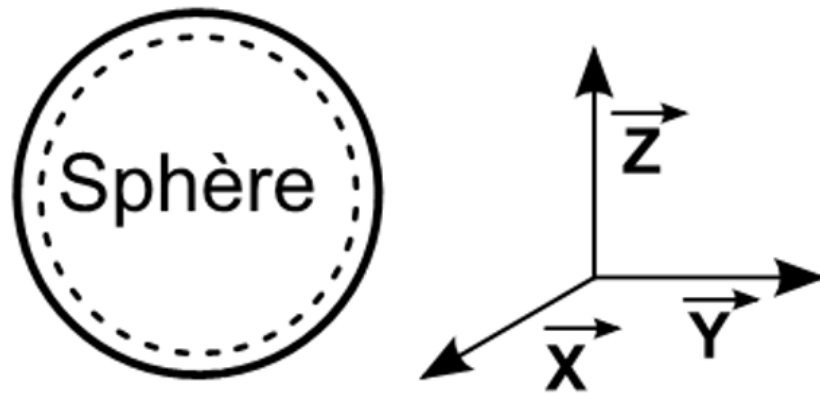
Utiliser des disques d'épaisseur  $dr$  dont le rayon varie avec  $z$ .

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{20}M(R^2 + 4H^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}M(R^2 + 4H^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}MR^2 \end{bmatrix}_{G,z}$$

# Moment d'inertie autour d'un axe

## Les solides élémentaires

### Sphère en G



Rayon R constant et épaisseur négligeable

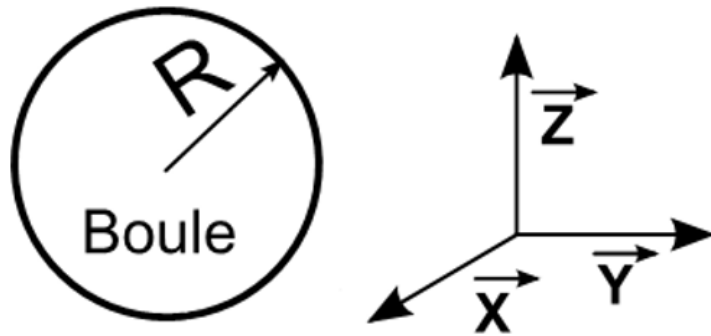
Calcul en G :  $A + B + C = 3A = 2 \cdot \int_S r^2 dm = 2 M R^2$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}MR^2 \end{bmatrix}_G$$

# Moment d'inertie autour d'un axe

## Les solides élémentaires

### Boule en G



Rayon R (Idem Sphère et utiliser une sphère creuse d'épaisseur dr).

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}MR^2 \end{bmatrix}_G$$



# Moment d'inertie autour d'un axe

## Théorème de Huygens

Ce théorème donne la relation existante entre  $[I_G(S)]$ , matrice d'inertie du solide  $S$  au centre de gravité  $G$ , et  $[I_Q(S)]$ , matrice d'inertie en un point  $P$  quelconque tel que  $\overrightarrow{QG} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$

$$[I_Q(S)] = [I_G(S)] + m \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$$

$$[I_Q(S)] = [I_G(S)] + m [\overrightarrow{QG}^2]$$

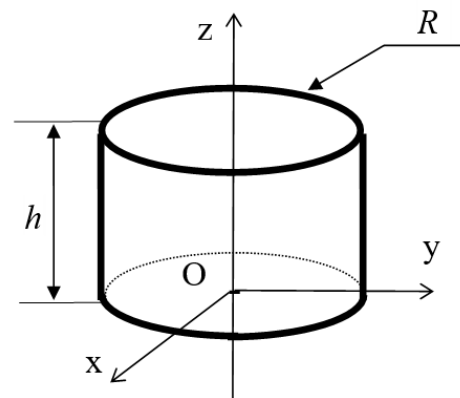
ATTENTION : Cette relation n'est valable qu'entre  $G$  et un autre point !!!

# Moment d'inertie autour d'un axe

## Théorème de Huygens

Remarque : Le **déplacement** de matrice ne s'utilise que pour pouvoir **trouver la matrice d'un solide constitué de volumes élémentaires** ET/OU dans le cas où l'on déplace en un **point du solide qui reste fixe** au cours du mouvement.

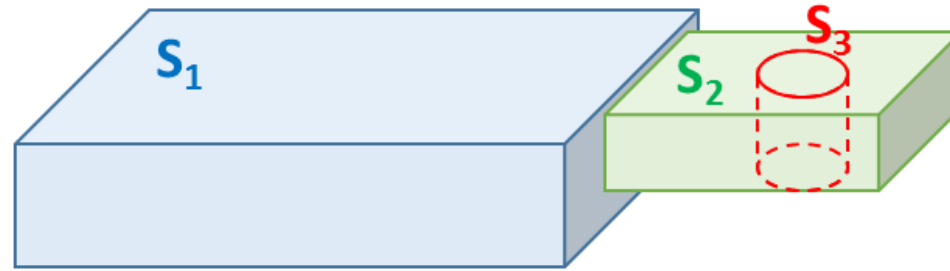
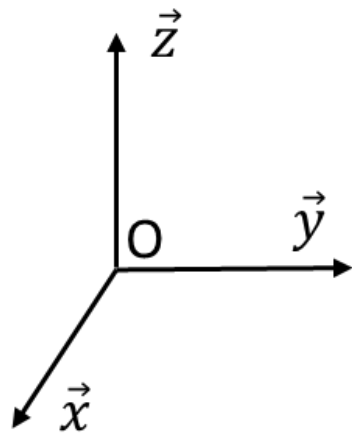
Exemple :



$$\begin{pmatrix} m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{-, -, z}$$

# Moment d'inertie autour d'un axe

Cas d'un solide complexe composé de solides élémentaires



$$\Sigma = S_1 + S_2 - S_3$$

$$[I_O(\Sigma)]_R = [I_O(S_1)]_R + [I_O(S_2)]_R - [I_O(S_3)]_R$$

Attention : Il est possible de **summer les matrices d'inertie** au **même point** et dans le **même repère**.

# Torseur cinétique (quantités de mouvements)

$$\{C(S/R_g)\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{Rc(S/R_g)} \\ \overrightarrow{\sigma(Q, S/R_g)} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_S \overrightarrow{V(P \in S/R_g)} dm(P) \\ \int_S \overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{V(P \in S/R_g)} dm(P) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Résultante cinétique} \\ \text{Moment cinétique en } Q \end{array}$$

# Torseur cinétique (quantités de mouvements)

Résultante cinétique (résultante du torseur)

$$\overrightarrow{R_c(S/R_g)} = M_S \overrightarrow{V(G \in S/R_g)}$$

$\overrightarrow{R_c(S/R_g)}$  ne dépend que de  $G$ , c'est un invariant vectoriel, caractéristique d'une résultante de torseur.

# Torseur cinétique (quantités de mouvements)

Moment cinétique (moment du torseur)

$$\overrightarrow{\sigma(A, S/R_g)} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_c(S/R_g)} + \overrightarrow{\sigma(B, S/R_g)}$$

$\overrightarrow{\sigma(Q, S/R_g)}$  est bien un champ de moment d'un torseur.

$$\overrightarrow{\sigma(Q, S/R_g)} = M_S \overrightarrow{QG} \wedge \overrightarrow{V(Q \in S/R_g)} + [I_Q(S)](\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}})$$

# Torseur cinétique (quantités de mouvements)

Moment cinétique (moment du torseur)

Cas particuliers :

$$Q \text{ fixe dans } R_g \rightarrow \overrightarrow{\sigma(Q, S/R_g)} = [I_Q(S)](\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}})$$

$$G = Q \rightarrow \overrightarrow{\sigma(G, S/R_g)} = [I_G(S)](\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}})$$

# Torseur cinétique (quantités de mouvements)

## Moment cinétique (moment du torseur)

### Remarques :

- Dans la plupart des calculs, nous essaierons de nous placer au point G pour des soucis de simplification de l'expression du moment cinétique
- Dans le cas où **Q appartient au solide** et est fixe, il faudra utiliser les méthodes précédentes pour les changements de point (Théorème de Huygens, ...)
- Si le moment cinétique doit être déterminé en A alors que l'opérateur d'inertie est donné en Q : on calcule le moment cinétique là où on connaît l'opérateur d'inertie, ici en Q puis on réduit le moment cinétique en A par la relation de moment.

On obtient alors la relation générale suivante :

$$\overrightarrow{\sigma(A, S/R_g)} = M_S \overrightarrow{QG} \wedge \overrightarrow{V(Q \in S/R_g)} + [I_Q(S)](\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}) + \overrightarrow{AQ} \wedge M_S \overrightarrow{V(G \in S/R_g)}$$